Лекція № 2

Продовжуємо обговорення наслідків з перетворень Лоренца.

1.5.4. Закон додавання швидкостей

Швидкість матеріальної точки в двох ІСВ S та S' визначається так:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad \vec{\upsilon}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}.$$

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}; \upsilon_y = \frac{dy}{dt}; \upsilon_z = \frac{dz}{dt}; \quad \upsilon'_x = \frac{dx'}{dt'}; \upsilon'_y = \frac{dy'}{dt'}; \upsilon'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

Швидкість S' відносно S:

$$\vec{V} = const$$

Нехай система S' відносно S рухається уздовж осі x. Скористаємося перетвореннями Лоренца (1.14) та візьмемо диференціали від обох частин усіх співвідношень

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad dy = dy'; \quad dz = dz';$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Поділимо кожне з перших трьох співвідношень на четверте

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + Vdt'}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'};$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dy'}{dt'}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\frac{dz'}{dt'}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}.$$

Маємо **релятивістський закон додавання швидкостей**

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + V}{1 + \frac{\upsilon'_x V}{c^2}}; \quad \upsilon_y = \frac{\upsilon'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{\upsilon'_x V}{c^2}}; \quad \upsilon_z = \frac{\upsilon'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{\upsilon'_x V}{c^2}}. \tag{1.26}$$

В обернених перетвореннях змінюємо знак швидкості V на $-V$ та міняємо місцями штриховані та нештриховані величини

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \frac{\upsilon_x V}{c^2}}; \quad \upsilon'_y = \frac{\upsilon_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{\upsilon_x V}{c^2}}; \quad \upsilon'_z = \frac{\upsilon_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{\upsilon_x V}{c^2}}; \tag{1.27}$$

В скорочених позначеннях

$$\beta = \frac{V}{c}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

перетворення швидкостей (1.26) та (1.27)

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + V}{1 + \left(\frac{V}{c}\right)\frac{\upsilon'_x}{c}}; \quad \upsilon_y = \frac{\upsilon'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \left(\frac{V}{c}\right)\frac{\upsilon'_x}{c}}; \quad \upsilon_z = \frac{\upsilon'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \left(\frac{V}{c}\right)\frac{\upsilon'_x}{c}};$$

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)\frac{\upsilon_x}{c}}; \quad \upsilon_y = \frac{\upsilon_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)\frac{\upsilon_x}{c}}; \quad \upsilon_z = \frac{\upsilon_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)\frac{\upsilon_x}{c}};$$

матимуть таких вигляд

$$\begin{aligned} &\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + V}{1 + \beta \frac{\upsilon'_x}{c}}; \quad \upsilon_y = \frac{\upsilon'_y}{\gamma\left(1 + \beta \frac{\upsilon'_x}{c}\right)}; \quad \upsilon_z = \frac{\upsilon'_z}{\gamma\left(1 + \beta \frac{\upsilon'_x}{c}\right)}; \\ &\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \beta \frac{\upsilon_x}{c}}; \quad \upsilon'_y = \frac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \beta \frac{\upsilon_x}{c}\right)}; \quad \upsilon'_z = \frac{\upsilon_z}{\gamma\left(1 - \beta \frac{\upsilon_x}{c}\right)}; \end{aligned} \tag{1.28}$$

У випадку малих швидкостей формули (1.26) та (1.27) (або (1.28)) перетворюються на формули класичного закону додавання швидкостей для спеціального випадку руху системи S' відносно S уздовж додатного напрямку осі *x*

$$\upsilon_x = \upsilon'_x + V; \quad \upsilon_y = \upsilon'_y; \quad \upsilon_z = \upsilon'_z;$$
$$\upsilon'_x = \upsilon_x - V; \quad \upsilon'_y = \upsilon_y; \quad \upsilon'_z = \upsilon_z.$$

Нехай $\upsilon'_x \to c; \quad \upsilon'_y = 0; \quad \upsilon'_z = 0.$ З (1.26) отримуємо

$$\upsilon_x = \frac{c+V}{1+\frac{cV}{c^2}} = \frac{c+V}{1+\frac{V}{c}} = c; \quad \upsilon_y = 0; \quad \upsilon_z = 0;$$
$$\upsilon_x = c; \quad \upsilon_y = 0; \quad \upsilon_z = 0.$$

Згідно із постулатом про інваріантність швидкості розповсюдження взаємодій отримали з релятивістського закону додавання швидкостей $\upsilon_x = \upsilon'_x = c.$

Отримані перетворення швидкості (1.26), (1.27) означають, що при переході від ІСВ S до ІСВ S' змінюється напрямок швидкості. Це призводить до аберації світла. Цей наслідок з перетворень Лоренца (релятивістський ефект Допплера) буде розглянутий на практичних заняттях.

1.6. Інтервал. Інваріантність інтервалу

Для нас визначити (зафіксувати) певну «подію» означає задати координати та час, тобто 4 змінні x, y, z, t в певній інерціальній системі відліку (ІСВ). Тобто відповісти на питання: де, коли та що відбувається. Як правило відбувається надсилання сигналу.

Розглянемо в деякій ІСВ дві події, які відбулися в різних точках простору в різні моменти часу: x_1, y_1, z_1, t_1 та x_2, y_2, z_2, t_2. Вводимо поняття інтервалу між двома подіями в системі відліку *S*:

$$S_{12}^2 = c^2\left(t_2 - t_1\right)^2 - \left(x_2 - x_1\right)^2 - \left(y_2 - y_1\right)^2 - \left(z_2 - z_1\right)^2. \qquad (1.29)$$

В системі відліку S' ці ж самі події задані так: x'_1, y'_1, z'_1, t'_1 та x'_2, y'_2, z'_2, t'_2. Інтервал між ними

$$\left(S'_{12}\right)^2 = c^2\left(t'_2 - t'_1\right)^2 - \left(x'_2 - x'_1\right)^2 - \left(y'_2 - y_1\right)^2 - \left(z'_2 - z'_1\right)^2.$$

Легко перевірити, що з перетворень Лоренца (1.14) випливає, що

$$S_{12}^2 = \left(S'_{12}\right)^2. \qquad (1.30)$$

Інваріантність інтервалу є наслідком принципу відносності. Таким чином **інтервал між подіями є релятивістським інваріантом**

$$S_{12} - \text{inv} \tag{1.31}$$

Інваріантність інтервалу є наслідком (математичним висловом) сталості швидкості світла у вакуумі.

1.6.1. Класифікація інтервалів

Згідно з формулою (1.29) інтервал складається із двох частин – часової та координатної:

$$S_{12}^2 = \underbrace{c^2\left(t_2 - t_1\right)^2}_{часова} - \underbrace{\left[\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2\right]}_{просторова};$$

$$\Delta t_{12} = t_2 - t_1; \quad \Delta l_{12} = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2};$$

Скорочений запис інтервалу буде таким

$$S_{12}^2 = c^2 \Delta t_{12}^2 - \Delta l_{12}^2. \tag{1.32}$$

Нехай часова частина інтервалу більша ніж просторова $\underline{S_{12}^2 > 0}$. Такий інтервал називають **часоподібним.** У випадку часоподібного інтервалу маємо можливість знайти таку ІСВ, в якій просторова частина дорівнює 0 (дві події відбуваються в одній й тій самій точці простору)

$$S_{12}^2 = \left(S_{12}'\right)^2; \quad c^2 \Delta t_{12}^2 - \Delta l_{12}^2 = c^2 \Delta t_{12}'^2 - \Delta l_{12}'^2 > 0;$$
$$\Delta t_{12} \neq 0, \quad \Delta l_{12}' = 0.$$

Надалі для спрощення запису індекси 1,2 писати не будемо:

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2 \Delta t'^2 > 0;$$

$$\Delta t' = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta l}{\Delta t}\right)^2} < \Delta t.$$

для часоподібних інтервалів проміжки часу є абсолютними – не існує такої ІСВ, в якій дві події відділені часоподібним інтервалом відбулися б в один й той самий момент часу (одночасно) $\Delta t' \neq 0$. Але обов'язково існує така ІСВ, в якій ці дві події відбуваються в одній й тій самій точці простору. Простір є відносним $\Delta l' = 0$.

Щоб відповісти на питання, чи існує система відліку, в якій дві певні події відбулися в одній точці простору, треба знайти інтервал від цими подіями. **Якщо $S_{12}^2 > 0$ (часоподібний інтервал), існує система відліку, де ці події одночасні.**

Нехай просторова частина інтервалу більша ніж часова $S_{12}^2 < 0$. Такий інтервал називають **просторовоподібним**. Абсолютним тепер є простір $\Delta l' \neq 0$, а час стає відносним $\Delta t' = 0$. Існує така система відліку, в якій ці дві події відбуваються в один й той же момент часу. Немає системі відліку, де ці дві події відбулися б в одній й тій самій точці простору. Для просторовоподібних інтервалів

$$c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = -\Delta l'^2 < 0;$$

$$\Delta l' = \frac{1}{c}\sqrt{\Delta l^2 - c^2\Delta t^2} < \Delta l.$$

Як тут із принципом причинності?

Коли дві події відбуваються з одним тілом, то інтервал між подіями завжди часоподібний. Дійсно, шлях, який тіло проходить між двома подіями, не може бути більше, ніж $c\Delta t$, бо швидкість тіла ненульової маси $\upsilon < c$, тому завжди $\Delta l < c\Delta t$, а $S_{12}^2 > 0$. Якщо дві події причинно пов’язані, то інтервали між ними обов’язково часоподібний.

Просторовоподібні інтервали відповідають причинно не пов’язаним (незалежним) подіям, бо будь-який фізичний сигнал має швидкість $\upsilon \leq c$ та не може пов’язати ці події.

Якщо інтервал між двома подіями часоподібний, то ці дві події, можуть бути причинно пов’язані. Якщо ж інтервал – просторовоподібний, то причинного зв’язку бути не може.

Поділ на часоподібні та просторовоподібні інтервали є абсолютним, бо як було доведено, інтервал є інваріантом відносно перетворень Лоренца – релятивістським інваріантом. Принцип причинності – причинний зв’язок між подіями – не порушується.

Вводять ще **світлоподібний** інтервал

$$S_{12}^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = 0.$$

для сигналів. які розповсюджуються зі швидкістю світла.

Проаналізуємо розташування подій на діаграмі в координатах x, t (див. рис.)

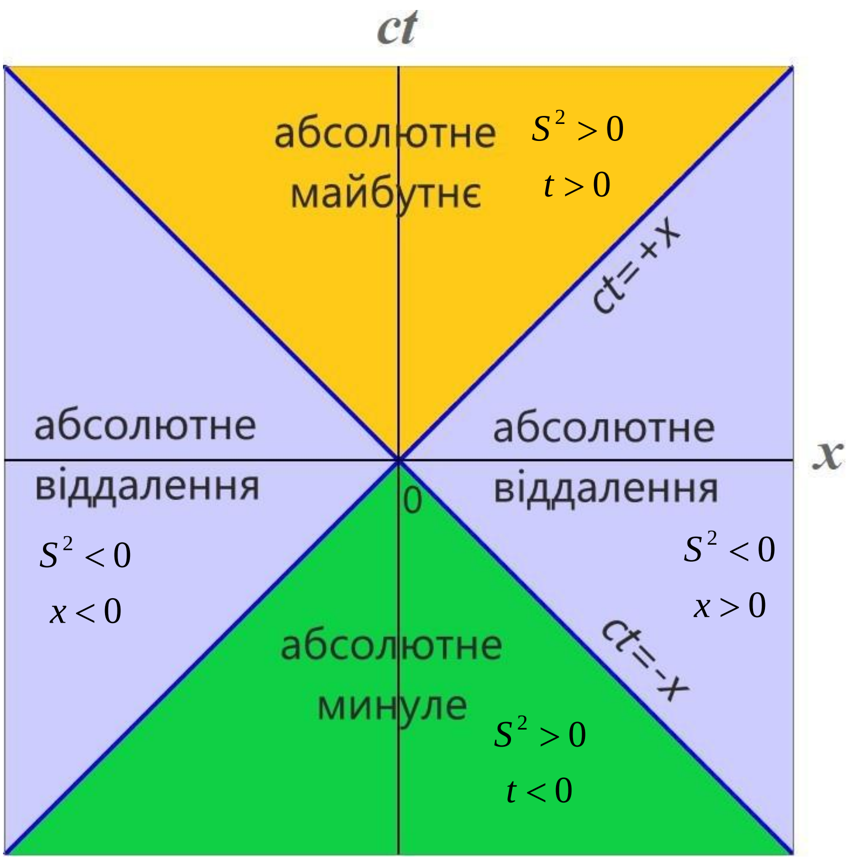

Рис. 2.1. Класифікація інтервалів

Нехай яка-небуть подія відбулася в точці $x=y=z=0$ (початок координат) в момент часу $t=0$. В якому співвідношенні будуть відносно неї інші події в площині x, ct ?

Є дві області з додатними (часоподібними) інтервалами $S^2>0, c^2t^2>x^2$. В верхній області ($t>0$) відбуваються пізніше, ніж подія в початку координат. Це область абсолютного майбутнього. В нижній області ($t<0$) всі події відбуваються раніш, ніж подія в початку координат. Це область абсолютно минулого. Не існує ІСВ, в якій би порядок подій порушувався. Але можна знайти ІСВ, в якій ці події відбуваються в одній точці простору (вертикальна лінія $x=0$)

Є дві області з від'ємними (просторовоподібними) інтервалами $S^2<0, c^2t^2<x^2$ Вони відповідають абсолютному віддаленню: $x\neq 0$. Але можна знайти систему відліку, в якій події сталися одночасно (горизонтальна лінія $t=0$). «Координата» ct може змінювати в цих областях свій знак, тому поняття «раніше», «пізніше» для подій розділених просторовоподібним інтервалом стає відносним.

Якщо розглянути всі три просторові змінні, то замість двох перехрещених прямих $ct = \pm x, t = x/c$, які відділяють просторовоподібні та часоподібні інтервали, будемо мати відповідний конус у чотиривимірній системі координат x, y, z, ct:

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0. \tag{1.33}$$

Конус (1.33) називають **світловим конусом**. Області абсолютного майбутнього та абсолютного минулого є двома внутрішніми полостями цього конусу. Решта простору відповідає абсолютному віддаленню. На рис. 2.2 показаний тривимірний світловий конус в координатах ct, x, y

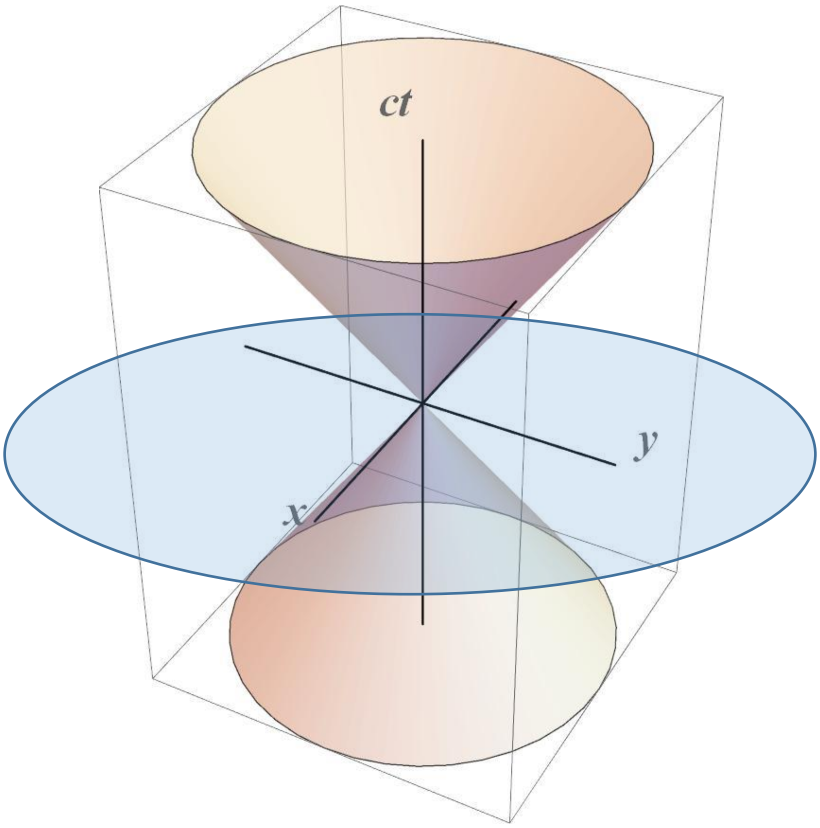

Рис. 2.2

В горизонтальній площині $t = 0$ події є одночасними. Ця площина відділяє минуле від майбутнього.

Зауважимо, що для випадку $S^2 > 0$ (часоподібний інтервал) проміжки часу найменші в тій ІСВ, в якій дві події відбуваються в одній й тій самій точці простору:

$$\Delta l' = 0, \quad \Delta t' = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta l^2}.$$

$\Delta t'$ – власний час.

Для $S^2 < 0$ (просторовоподібний інтервал) відстані між подіями також є найменшими в тій ІСВ, де події відбулися одночасно $\Delta t' = 0, \quad \Delta l' = \sqrt{\Delta l^2 - c^2 \Delta t^2}$.

1.6. Геометричне значіння перетворень Лоренца. Чотиривимірний простір-час

Багатьом результатам релятивістської кінематики можна надати геометричне значіння.

В спеціальній теорії відносності час, як і простір є відносними. Зручно ввести чотиривимірний простір. Цей 4-простір називають «простір-час» (space-time), «світ» (world), світовий простір, простір Мінковського.

Герман Мінковський
(1866-1909)

Німецький математик Г.Мінковський в 1907 році запропонував поняття «чотиривимірний простір-час», в якому координати та час є рівноправними змінними. Подія в 4-просторі визначається певною точкою. Точки 4-простору називають «світові точки». Перетворення Лоренца

$$S^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

як ми вже знаємо, зберігають інтервал між подіями. Це означає, що ці перетворення в 4-просторі можна розглядати, як перетворення повороту, яке зберігає довжину вектору. Треба тільки врахувати, що інтервал може бути як додатним, так й від’ємним. Це буде так званий псевдоевклідов простір.

В літературі є декілька варіантів введення координат 4-радіус-вектора. В перших виданнях «Теорії поля» Ландау, Ліфшиця визначення координат 4 простору було таким:

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict; \quad i = \sqrt{-1}. \tag{1.34}$$

Три перші просторові координати є дійсними числами, а четверта часова – уявною. Довжина 4-радіус-вектора це

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = -S^2. \qquad (1.35)$$

Напишемо перетворення Лоренца (1.14) в позначеннях (1.34)

$$x_1 = \frac{x_1' - i\left(\frac{V}{c}\right)x_4'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad x_2 = x_2'; \quad x_3 = x_3'; \quad x_4 = \frac{i\left(\frac{V}{c}\right)x_1' + x_4'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (1.36)$$

Згадаємо, що перетворення Лоренца зберігають довжину вектору. З геометричної точки зору таких перетворень є три типи: паралельний перенос та поворот, та інверсія. Паралельний перенос – це тривіальний варіант. Нас цікаві тільки поворот та інверсія. Інверсія – це зміна знаку у непарного числа координат (або 1 або 3 у випадку 4-простору).

Перетворення Лоренца у вигляді (1.36) є поворотом у площині $x_1, x_4 = ict$